

## Anwendungen

Jan Erik Stellet\*, Andre Suchaneck, Martin Gießler, Fernando Puente León und Frank Gauterin

# Fahrbahnreibungsschätzung mit optimaler linearer Parametrierung

Tire-road friction estimation with optimal linear parameterisation

**Zusammenfassung:** Modellbasierte Verfahren zur Fahrdynamikregelung beruhen auf einer Beschreibung des Reifen-Fahrbahn-Kraftschlusspotenzials. Dieser Beitrag beschreibt eine neue Methode zur schlupfbasierten Fahrbahnreibungsschätzung unter besonderer Berücksichtigung der on-line Anwendung. Hierzu wird eine optimale lineare Parametrierung des Burckhardt-Reifenmodells untersucht. Gegenüber bisherigen Arbeiten erzielt das vorgeschlagene Modell eine verbesserte Approximation. Des Weiteren werden Parameterschätzverfahren für das Modell diskutiert und in einer Gesamtfahrzeugsimulation evaluiert.

**Schlüsselwörter:** Reifen, Reibungsschätzung, lineare Parametrierung, Parameterschätzung.

**Abstract:** Estimating tire-road friction is of significant importance for the development of vehicle safety systems. Depending on the chosen tire model, reliable on-line identification of the coefficient of friction is a challenging task. This article presents a novel method for slip-based tire-road friction estimation by employing an improved linear parameterisation of the Burckhardt friction model. In terms of approximation error, a significant improvement over previous works is observed. Furthermore, methods for reliable on-line parameter estimation are analysed and studied in simulation. The proposed method shows improved robustness.

**Keywords:** Tire, Friction, Function approximation, Parameter estimation.

\***Korrespondenzautor:** Jan Erik Stellet, Karlsruher Institut für Technologie, Kaiserstraße 12, D-76131 Karlsruhe, Germany, E-Mail: [jan.stellet@student.kit.edu](mailto:jan.stellet@student.kit.edu)

**Andre Suchaneck, Fernando Puente León:** Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Industrielle Informationstechnik, Hertzstraße 16, D-76187 Karlsruhe, Germany

**Martin Gießler, Frank Gauterin:** Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Fahrzeugsystemtechnik, Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik, Rintheimer Querallee 2, D-76131 Karlsruhe, Germany

DOI 10.1515/auto-2013-1037

Eingang 7. Mai 2013; angenommen 5. April 2014

## 1 Einleitung

Fahrerassistenzsysteme zur Fahrdynamikregelung, wie das Elektronische Stabilitätsprogramm (ESP), verhindern kritische Fahrzustände und erhöhen damit die Fahrsicherheit. Eine fahrdynamisch kritische Situation ist dadurch gekennzeichnet, dass die maximal am Reifen übertragbare Kraft überschritten wird. Ein niedriger Fahrbahnreibungswert, etwa aufgrund von Nässe, begünstigt dies. Es kommt zum Blockieren oder Durchdrehen der Räder, was die Kraftübertragung in Längs- und Querrichtung einschränkt.

Modellbasierte Ansätze zur Fahrdynamikregelung erfordern eine hinreichend genaue Modellbildung des Fahrbahn-Reifen-Kontaktes. Aufgrund von wechselnden Witterungs- und Straßenverhältnissen ist dies ohne geeignete Mess- oder Schätzeinrichtung nicht zufriedenstellend zu leisten. Eine Klassifikation der Fahrbahn mit zusätzlichen, etwa akustischen Sensoren [3], hat sich hierfür nicht durchgesetzt. Es werden daher Schätzverfahren eingesetzt, um aus den im Fahrzeug typischerweise messbaren Größen ein Modell der Kraftübertragung abzuleiten.

Besondere Beachtung kommt dabei schlupfbasierten Modellen zu, deren Form und Abhängigkeiten empirisch ermittelt werden. Diese Arbeit beschreibt eine neue Modellform des vielfach eingesetzten Burckhardt-Modells [4]. Dazu wird eine lineare Parametrierung des Modells eingeführt, was den Einsatz eines Least-Squares-Schätzers zur Schätzung der Modellparameter erlaubt. In Hinblick auf eine einfache Implementierung und geringen Rechenaufwand eines Schätzers ist dies vorteilhaft gegenüber dem ursprünglichen nichtlinearen Modell. Auch für den Entwurf einer Schlupfregelung, beispielsweise in Form eines adaptiven Reglers, ergeben sich Vorteile [9].

Diese Beweggründe haben *Tanelli et al.* [28] motiviert, eine derartige Approximation als Linearkombination von

Basisfunktionen mithilfe von heuristischen Überlegungen zu entwickeln. Auf systematische Art und Weise haben darauf aufbauend *de Castro et al.* [7] verschiedene Klassen von Basisfunktionen untersucht und eine verbesserte Approximation ermittelt. In dieser Veröffentlichung wird eine neue Klasse von Basisfunktionen vorgeschlagen und hierfür eine optimale lineare Parametrierung bestimmt.

Darüber hinaus wird auf Herausforderungen eingegangen, die sich bei der rekursiven on-line Schätzung ergeben. Dies betrifft die Initialisierung des Schätzers, den Einfluss fehlender Systemanregung sowie die Erkennung von Parameteränderungen.

In Abschnitt 2 werden zunächst Grundlagen zur Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn beschrieben. Anschließend wird in Kapitel 3 die Methode der optimalen linearen Parametrierung vorgestellt und für die vorgeschlagene Klasse von Basisfunktionen angewendet. Ein quantitativer Vergleich mit bestehenden Modellen schließt diesen Teil ab. Der Abschnitt 4 befasst sich mit der on-line Identifikation der Modellparameter. Die Ergebnisse werden in der Zusammenfassung abschließend dargestellt.

## 2 Modell der Kraftübertragung

Alle im Folgenden betrachteten Zusammenhänge beziehen sich auf den Beschleunigungsfall des Reifens bei reiner Längsbewegung. Grundsätzlich sind Beschleunigungs- und Bremsfall analog zu behandeln, was in [4] ausführlich dargelegt wird. Auch kombinierte Längs- und Querbewegungen können durch erweiterte Modellgleichungen, beispielsweise unter Berücksichtigung des Kamm'schen Reibkreises, betrachtet werden.

### 2.1 Grundlagen

Die Kraftübertragung zwischen einem angetriebenen Fahrzeugreifen und der Fahrbahn wird durch eine kraftschlüssige Verbindung beschrieben [21]. Diese Verbindung ist zunächst durch die vom Fahrzeugaufbau vertikal auf die Reifenaufstandsfläche (Latsch) wirkende Radaufstandskraft  $F_z$  gekennzeichnet. Wird ein Drehmoment in das Rad eingeleitet, kommt es zur Verformung der Latschenelemente und einer Übertragung der Radumfangskraft  $F_x$  auf die Fahrbahn.

Überschreitet der Quotient aus Radumfangskraft und Radaufstandskraft den maximal übertragbaren Reibwert  $\mu_{\max}$ , beginnt der Reifen durchzudrehen. Die dabei auftre-

tende Relativbewegung des Reifens kann durch die normierte Differenz von Radumfangsgeschwindigkeit  $\omega r$  und Fahrgeschwindigkeit  $v_x$  beschrieben werden. Es existieren unterschiedliche Definitionen der als Schlupf  $\lambda$  bezeichneten Größe. In dieser Arbeit wird die Schlupfdefinition nach *Burckhardt* [4] verwendet. Für ein angetriebenes, durchdrehendes Rad wird dabei auf die Radumfangsgeschwindigkeit normiert und im Bremsfall mit einem blockierenden Rad auf die Fahrgeschwindigkeit. Hier wird der Beschleunigungsfall untersucht und es ist:

$$\lambda = \frac{\omega r - v_x}{\omega r}. \quad (1)$$

Als zweite dimensionslose Größe wird der Längskraftschluss  $\mu$  eingeführt. Dieser setzt die Radumfangskraft  $F_x$  ins Verhältnis zur Radaufstandskraft  $F_z$ :

$$F_x = \mu(\lambda) F_z. \quad (2)$$

### 2.2 Reifenmodelle

Der nichtlineare Zusammenhang  $\mu(\lambda)$  zwischen Kraftschluss und Reifenschlupf ist abhängig von Reifen- und Fahrbahneigenschaften. Hierfür existieren verschiedene empirisch und physikalisch begründete Modellformen. Für realistische Simulationsmodelle eignet sich insbesondere die Familie der umfangreichen PACEJKA-Modelle [24] mit über 80 Modellparametern oder das dynamische LuGre-Modell [32].

Im Fokus dieser Arbeit stehen hingegen die Anforderungen des robusten und echtzeitauglichen Einsatzes in Fahrdynamikreglern, sodass statische Modelle mit wenigen Freiheitsgraden besser geeignet sind. Ein vielfach verwendetes Modell ist die *Magic Tyre Formula* [24] mit vier Parametern  $c_i$ :

$$\mu(\lambda) = c_3 \sin [c_2 \arctan (c_1 (1 - c_4) \lambda + c_4 \arctan (c_1 \lambda))] . \quad (3)$$

Das Burckhardt-Modell [4] beschreibt das quasi-stationäre Kraftübertragungsverhalten des Reifens in der Grundform durch drei Parameter. Eine Nichtlinearität tritt dabei im Vergleich zu (3) nur für  $c_2$  auf:

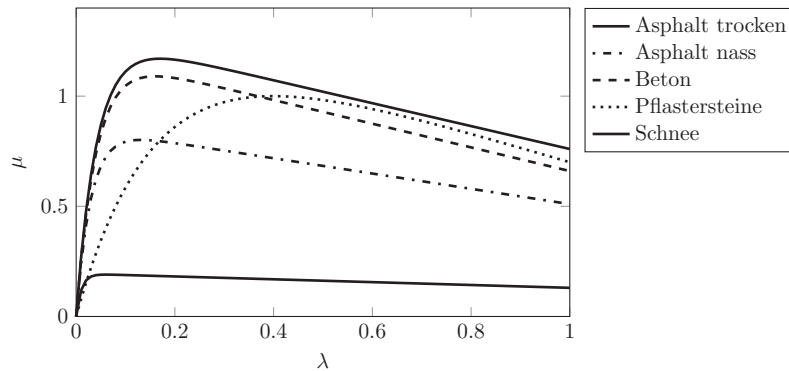
$$\mu(\lambda) = c_1 (1 - \exp(-c_2 \lambda)) - c_3 \lambda. \quad (4)$$

Zwei weitere Modelle ohne Nichtlinearitäten in den Parametern sind das KIENCKE-Modell [15]

$$\mu(\lambda) = \frac{c_1 \lambda}{c_3 \lambda^2 + c_2 \lambda + 1} \quad (5)$$

sowie eine erweiterte Form mit vier Parametern [2]:

$$\mu(\lambda) = \frac{c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda}{c_4 \lambda^2 + c_3 \lambda + 1}. \quad (6)$$



**Abbildung 1:** Exemplarischer Verlauf von  $\mu$ -Schlupf-Kurven. Abbildung erstellt nach dem Burckhardt-Reifenmodell unter Verwendung der Parameterwerte aus [15].

Zur Parameterschätzung lassen sich die beiden letztgenannten Modellgleichungen vorteilhafterweise in der folgenden Form darstellen:

$$y = \psi^T \cdot \theta. \quad (7)$$

Es liegt außerhalb des Anspruchs dieses Beitrags, eine umfassende vergleichende Bewertung der Modellgenauigkeit in Bezug auf empirische  $\mu$ -Schlupf-Kurven zu leisten. Im Fokus steht eine Untersuchung der Modellformen für die on-line Parameterschätzung. Motiviert durch die empirische Validierung [4], den vielfachen Einsatz sowie die Realisierung sehr qualitativ unterschiedlicher Kurvenverläufe wird das Burckhardt-Modell (4) als Ausgangspunkt genommen. Referenzparameterwerte für unterschiedliche Fahrbahnverhältnisse sind dabei [15] entnommen, was auf die  $\mu$ -Schlupf-Kurven in Abbildung 1 führt.

### 2.3 Methoden zur Schätzung des Fahrbahnreibwertes

Von großem Interesse für eine Fahrdynamikregelung ist die Kenntnis des Haftreibwertes  $\mu_{\max}$ , den die Kombination aus Reifen-, Fahrbahn sowie Witterungsverhältnissen zulässt. Für schlupfbasierte Regelsysteme ist des Weiteren der zu  $\mu_{\max}$  korrespondierende Schlupfwert  $\lambda_{\max}$  relevant. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Vielzahl der vorhandenen Methoden gegeben [22]. Hierfür benötigte Eingangsgrößen wie die Fahrgeschwindigkeit sowie die Radkräfte können mit geeigneten Filtern aus Standard-Messgrößen ermittelt werden [10].

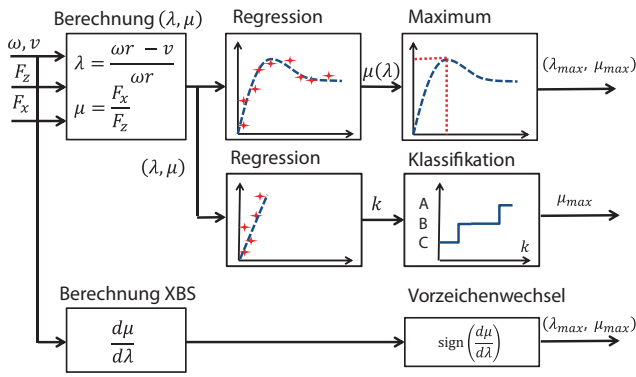
Schlupfbasierte Ansätze zur Erkennung von  $\mu_{\max}$  werden in qualitative und quantitative Verfahren unterschieden [7]. Erstgenannte Methoden liefern eine abgestufte Einschätzung der Reibwertverhältnisse mit je einem korrespondierenden  $\mu_{\max}$ -Wert [14, 22, 26, 30]. Es werden keine

vollständigen Reifenmodelle, sondern lediglich die Parameter Steigung  $k$  (Längskraftsteifigkeit des Reifens, engl. *slip-slope*) und Offset  $\delta$  einer Geradenapproximation des linearen Kurvenbereichs bei niedrigen Schlupfwerten geschätzt. Mit den geschätzten Parametern wird dann ein Rückschluss auf den außerhalb des linearen Bereiches liegenden Haftreibwert  $\mu_{\max}$  vorgenommen. Allerdings ist die Kurvensteigung von zahlreichen weiteren Faktoren wie dem Reifenzustand, Reifendruck sowie Fahrbahnzustand abhängig [5]. Für die Reibwertschätzung im qualitativen Ansatz ist aus diesem Grund eine zusätzliche Klassifikation und ein entsprechendes Klassifikatortraining notwendig.

Quantitative Verfahren verwenden Modelle zur Beschreibung der vollständigen Kraftübertragungskennlinie ( $\mu$ -Schlupf-Kurve) und schätzen die Modellparameter [7, 10, 28]. Das Maximum ( $\lambda_{\max}$ ,  $\mu_{\max}$ ) im Kurvenverlauf lässt sich dann analytisch bestimmen. Es ist hervorzuheben, dass die Schätzung des gesamten Kurvenverlaufs höhere Anforderungen an den Wertebereich der gemessenen Daten stellt. Dies motiviert hybride Ansätze, bei denen selektiv nur eine Geradenapproximation oder ein zweites Modell für den nichtlinearen Kurvenbereich geschätzt werden [1, 27].

Darüber hinaus existieren quantitative Ansätze auf Basis der momentanen Steigung der  $\mu$ -Schlupf-Kurve (engl. *extended braking stiffness, XBS*) [12, 23, 29, 31]. Offensichtlich korrespondiert der maximale Reibbeiwert mit einem Vorzeichenwechsel dieser ersten Ableitung.

Eine Übersicht der drei beschriebenen Verfahren zeigt Abbildung 2. Aufgrund der Einsichten, die eine modellbasierte Herangehensweise erlaubt, wird hier der quantitative Ansatz verfolgt.



**Abbildung 2:** Darstellung der Methoden zur schlupfbasierten Reibwertermittlung: Modellbasiert (quantitativ), *slip-slope*-basiert (qualitativ) sowie auf Grundlage des Vorzeichens der XBS (quantitativ). Abbildung erstellt nach [7].

### 3 Optimale lineare Parametrierung des Burckhardt-Modells

In diesem Abschnitt wird eine approximative lineare Form des Burckhardt-Modells (4) beschrieben. Im Unterschied zu den linearen Modellen (5)-(6) soll eine erhöhte Robustheit der Parameterschätzung ermöglicht werden, indem auch sehr flach verlaufende  $\mu$ -Schlupf-Kurven besser abgebildet werden.

#### 3.1 Methode

Der nichtlineare Term des Modells:

$$f(\lambda) := c_1 \cdot \exp(-c_2 \lambda) \quad (8)$$

wird durch eine Linearkombination von  $n$  Basisfunktionen (lineare Parametrierung) approximiert. Die Approximation wird in [7] als Optimierungsproblem formuliert. Es wird dazu vom Ansatz

$$\hat{f}(\lambda, \theta_1) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot h_i(\lambda) \quad (9)$$

ausgegangen. Die Basisfunktionen  $h_i(\lambda)$  werden aus einer Funktionenschar gewählt. Anschließend ist die Verteilung der Scharparameter gesucht, die zur optimalen Approximation führt. Als Optimierungskriterium wird die quadratische Norm des Fehlers – im für die Praxis relevanten Bereich  $\lambda \in [0, \lambda^+]$  mit  $\lambda^+ = 0,5$  – gewählt:

$$\epsilon = \|f - \hat{f}\| = \int_0^{\lambda^+} [f(\lambda) - \hat{f}(\lambda, \theta_1)]^2 d\lambda. \quad (10)$$

Unter der Annahme von  $i = 1 \dots n$  linear unabhängigen Basisfunktionen  $h_i(\lambda)$  und Kenntnis von  $f(\lambda)$  lässt sich das Problem (10) eindeutig nach dem Koeffizientenvektor  $\theta_1$  auflösen. Die Lösung ist allgemein gegeben durch [16]:

$$\hat{f}(\lambda, \theta_1) = \underbrace{[h_1(\lambda) \dots h_n(\lambda)]}_{=: \mathbf{h}(\lambda)} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b} \quad (11)$$

wobei die Elemente von  $\mathbf{G}$  sowie  $\mathbf{b}$  durch die Innenprodukte

$$G_{ij} = \int_0^{\lambda^+} h_j(\lambda) h_i(\lambda) d\lambda, \quad b_i = \int_0^{\lambda^+} f(\lambda) h_i(\lambda) d\lambda \quad (12)$$

bestimmt sind.

Verglichen mit Polynomen und logistischen Funktionen wird in [7] die Verwendung von Exponentialfunktionen

$$h_i(\lambda) = \exp(-w_i \lambda) \quad (13)$$

als bester Ansatz ermittelt. Bei der Bestimmung der optimalen Scharparameter  $w_i$  ist zu berücksichtigen, dass die Ursprungsfunktion  $f(\lambda, c_2)$  nach (8) als eine über den Parameter  $c_2$  bestimmte Schar vorliegt. Die Optimierung soll eine optimale Approximation nicht lediglich einer, sondern einer großen Bandbreite der in der Realität anzutreffenden Funktionen  $f(\lambda, c_2)$  leisten. Daher wird der totale Fehler  $\epsilon_T$  durch Integration von (10) über den Parameterbereich für typische Fahrbahnverhältnisse  $c_2 \in [c_2^-; c_2^+]$  mit  $c_2^- = 4, c_2^+ = 100$  [15] definiert [7]:

$$\epsilon_T = \int_{c_2^-}^{c_2^+} \int_0^{\lambda^+} [f(\lambda, c_2) - \mathbf{h}(\lambda) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}(c_2)]^2 d\lambda dc_2. \quad (14)$$

Die Basisfunktionen  $\mathbf{h}(\lambda)$  mit der besten Approximation sind durch die das Fehlerkriterium (14) minimierenden Exponenten  $\hat{\mathbf{w}}$  beschrieben:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min \epsilon_T(\mathbf{w}). \quad (15)$$

Damit ergibt sich die optimale lineare Parametrierung  $n$ -ter Ordnung des Burckhardt-Modells nach [7]:

$$\mu(\lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \exp(-\hat{w}_i \lambda) + \theta_{n+1} - \theta_{n+2} \cdot \lambda. \quad (16)$$

### 3.2 Vorgeschlagene Lösung

#### 3.2.1 Motivation

Das Modell nach (16) stellt eine Approximation des Burckhardt-Modells (4) dar. Im ursprünglichen Modell ist

jedoch die Zwangsbedingung  $\mu(\lambda = 0) = 0$  vorhanden, die in der linearisierten Form nicht mehr auftritt. Die Möglichkeit, dass

$$\mu(\lambda = 0) = \sum_{i=1}^n \theta_i + \theta_{n+1}. \quad (17)$$

einen anderen Wert als null annehmen kann, stellt daher einen zusätzlichen Freiheitsgrad im Modell dar.

In der Praxis treten dadurch Schwierigkeiten auf: Werden rekursive Schätzverfahren mit begrenztem Zeithorizont eingesetzt, haben zeitlich weit zurückliegende Messergebnisse einen verschwindenden Einfluss auf die aktuelle Schätzung. Nach einer anfänglichen Beschleunigung wird sich ein Schlupfwert  $\lambda > 0$  einstellen, da nur dieser eine Kraftübertragung ermöglicht. Damit geht das Wissen des Schätzers über den charakteristischen linearen Teil der Kurve verloren. Es ist daher möglich, dass die Schätzung – im Sinne einer optimalen Anpassung an die Messwerte – gegen eine unplausible Lösung mit hohen Werten  $\mu(0) > 0$  konvergiert.

Diese Schwierigkeit wird von *de Castro et al.* in der Veröffentlichung [8] aufgegriffen. Die dargestellte Lösung integriert die Zwangsbedingung in den Parameterschätzer, sodass anstelle eines rekursiven Least-Squares (RLS) Schätzers das modifizierte *Constrained RLS*-Verfahren [19] eingesetzt wird.

### 3.2.2 Ansatz

Hier wird vorgeschlagen, die Struktur der Basisfunktionen zu modifizieren, sodass  $\mu(0) = 0$  wie auch im Ursprungsmodell stets vorliegt. Es kann dann weiterhin das herkömmliche RLS-Verfahren eingesetzt werden. Dazu wird die modifizierte Funktion  $\hat{f}_2(\lambda, \theta_1)$ :

$$\hat{f}_2(\lambda, \theta_1) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot (\exp(-v_i \lambda) - 1) \quad (18)$$

zur Approximation des Terms

$$f_2(\lambda) := c_1 (1 - \exp(-c_2 \cdot \lambda)) \quad (19)$$

angesetzt. Insgesamt wird das Burckhardt-Modell approximiert durch:

$$\mu(\lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot (1 - \exp(-v_i \lambda)) - \theta_{n+1} \cdot \lambda. \quad (20)$$

Im Vergleich zu (16) verfügt das Modell um einen zu schätzenden Parameter weniger.

### 3.2.3 Numerische Lösung

Das Gütefunktional  $\epsilon_T$  nach (14) wird mithilfe der Trapezregel approximiert<sup>1</sup> und in MATLAB implementiert. Zur numerischen Lösung dieses nichtlinearen Optimierungsproblems wird wie in [7] das Programm ZIENA OPTIMIZATION LLC [20] eingesetzt.

Zunächst wird der totale Fehler für die in [28] nach heuristischen Überlegungen gefundene Lösung bestimmt. Hierbei wurden  $n = 4$  Exponenten der Basisfunktionen nach (13) gleichmäßig in  $[c_2^-, c_2^+]$  verteilt:

$$\hat{\mathbf{w}} = [4 \quad 36 \quad 68 \quad 100]. \quad (21)$$

Der resultierende Fehler ist  $\epsilon_T = 0,092$  und wird als Maßstab für die optimierten Lösungen gewählt.

Die in [7] beschriebene numerische Minimierung des Fehlerkriteriums (14) liefert für  $n = 3$  Basisfunktionen eine Lösung mit  $\epsilon_T = 0,0036$ .<sup>2</sup> Dieses Ergebnis ist (16) mit:

$$\hat{\mathbf{w}} = [6,184 \quad 20,415 \quad 66,974]. \quad (22)$$

Eine Erhöhung der Modellordnung auf  $n = 4$  Basisfunktionen führt auf eine genauere Approximation mit  $\epsilon_T = 0,0005$ . Zugunsten einer geringeren Zahl an Parametern wird diese Lösung in [7] nicht weiter verfolgt.

Mit der vorgeschlagenen Klasse von Basisfunktionen lässt sich für  $n = 3$  jedoch eine Approximation mit  $\epsilon_T = 0,0018$  finden. Diese Lösung ist (18) mit:

$$\hat{\mathbf{v}} = [8,105 \quad 27,547 \quad 75,012]. \quad (23)$$

Insgesamt ist damit eine neue lineare Parametrierung des Burckhardt-Modells nach (20) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, \theta) &= \theta_1 \cdot (1 - \exp(-8,105\lambda)) \\ &+ \theta_2 \cdot (1 - \exp(-27,547\lambda)) \\ &+ \theta_3 \cdot (1 - \exp(-75,012\lambda)) - \theta_4 \cdot \lambda. \end{aligned} \quad (24)$$

## 3.3 Vergleich der Modelle

Eine umfangreiche Bewertung verschiedener Reifenmodelle bei der on-line Schätzung des maximalen Kraftschlussbeiwertes wird in [6, 7] beschrieben. Es werden in

<sup>1</sup> Es werden die Integrationsschrittweiten  $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $\Delta\beta = 10^{-3}$  gewählt.

<sup>2</sup> Für größere Integrationsschrittweiten  $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$  und  $\Delta\beta = 10^{-2}$  kann die in [7] angegebene Lösung mit  $\epsilon_T = 0,0046$  reproduziert werden.

[6] unter anderem das KIENCKE-Modell, ein Polynommodell zweiter Ordnung nach [13] und die lineare Parametrierung nach [28] verglichen. Die Referenzverläufe basieren dabei auf der MAGIC TYRE FORMULA. Unter allen linearen Modellen zeigt die lineare Parametrierung die besten Ergebnisse. In [7] wird diese Untersuchung mit einen systematischen Vergleich verschiedener linearer Approximationen des Burckhardt-Modells vertieft.

Die folgende Analyse knüpft hier an und untersucht das vorgeschlagene neue Modell (24). Hierzu werden fünf  $\mu$ -Schlupf-Kurven des Burckhardt-Modells (4) mit Parametern nach [15] betrachtet. Es werden Stichproben von virtuellen Messwerten mit je 41 äquidistanten Werten  $\lambda \in [0; 0,4]^3$  und den zugehörigen  $\mu$ -Werten generiert. Letztere werden durch simuliertes mittelwertfreies Gauß'sches Messrauschen mit  $\sigma_\mu = 0,05$  überlagert. Mit jedem der fünf Parametersätze werden jeweils  $N = 10000$  unabhängige Simulationen ausgeführt.

Als Referenz wird ein Maximum-Likelihood (ML) Schätzer als numerisch zu lösendes nichtlineares Optimierungsproblem betrachtet. Untersucht wird, wie sich bei gleicher Messinformation die Least-Squares-Schätzungen der linearen Modelle hierzu verhalten. Es werden das KIENCKE-Modell (5), das linear parametrisierte Modell (16) sowie die neue Variante (24) verglichen.

Zur Bewertung wird das Integral des absoluten Fehlers zwischen der ML-Schätzung und den LS-Schätzungen betrachtet. Dabei wird der Bereich  $\lambda \in [0; 1]$  berücksichtigt, wohingegen die Optimierung (14) nur für einen Ausschnitt  $\lambda \in [0; \lambda^+]$  erfolgte. Somit wird auch die Stabilität der linearen Approximation für hohe Schlupfwerte bewertet. Zur Normierung wird das Fehlerintegral auf die Fläche unter der tatsächlichen  $\mu$ -Schlupf-Kurve bezogen:

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{\int_0^1 |\mu_{\text{ML}}(\lambda, \hat{\theta}_{\text{ML}}) - \mu_{\text{LS}}(\lambda, \hat{\theta}_{\text{LS}})| d\lambda}{\int_0^1 \mu(\lambda) d\lambda}. \quad (25)$$

Die Medianwerte des Fehlerintegrals über alle Simulationsläufe sind in Tabelle 1 angegeben. Im Vergleich der beiden linearen Parametrierungen zeigt sich für die neue Lösung eine deutliche Verringerung des Fehlermaßes um durchschnittlich 35 %, in drei von fünf Fällen um mehr als 50 %.

Quantitativ bestätigen die Ergebnisse ebenfalls die in [6] festgestellten Vorteile der Approximation durch Expo-

**Tabelle 1:** Vergleich des linear parametrisierten Burckhardt-Modells (16) nach [7] (lin. Burckhardt I) und der neuen Lösung (24) (lin. Burckhardt II) sowie des KIENCKE-Modells (5) mit der ML-Schätzung des Burckhardt-Modells (Medianwerte des Fehlerintegrals  $\epsilon_{\text{rel}}$  nach (25) relativ zur Fläche unter der Kurve aus  $N = 10\,000$  Simulationen).

Parametersatz	lin. Burckhardt I	lin. Burckhardt II	KIENCKE-Modell
Asphalt	10,11%	5,21%	17,98%
Asphalt (nass)	15,55%	7,70%	36,92%
Beton	11,24%	5,53%	19,69%
Pflastersteine	9,67%	7,26%	12,76%
Schnee	46,71%	30,39%	163,93%

ponentialfunktionen gegenüber einer gebrochen rationalen Funktion, wie im KIENCKE-Modell. Des Weiteren deutet eine qualitative Auswertung an, dass es insbesondere bei sehr flach verlaufenden  $\mu$ -Schlupf-Kurven zu degenerierten Lösungen kommen kann. Dies könnte verhindert werden, indem Nullstellen des Nennerpolynoms im relevanten Bereich  $\lambda \in [0; 1]$  ausgeschlossen werden. Allerdings führt dies auf eine Erweiterung des Schätzverfahrens um eine nichtlineare Ungleichung als Nebenbedingung.

## 4 On-line Identifikation der Modellparameter

Im Folgenden wird die on-line Parameteridentifikation des linear parametrisierten Burckhardt-Modells untersucht. Es wird dabei angenommen, dass der Fahrbahnreibwert  $\mu_{\text{max}}$  und damit die Modellparameter stückweise konstant sind, jedoch spontane Wechsel der Verhältnisse auftreten können ( $\mu$ -Sprung). Zuerst wird auf die wesentlichen Herausforderungen eingegangen und anschließend eine zusammenhängende Methode abgeleitet.

### 4.1 Herausforderungen und Ansätze

**Initialisierung:** Als Anfangswert eines rekursiven Verfahrens kann ein vorgegebener Wert  $\hat{\theta}_0$  eingesetzt werden. Angesichts der in Abbildung 1 erkennbaren Variation zwischen den für eine anfänglich unbekannte Fahrbahn infrage kommenden  $\mu$ -Schlupf-Kurven stellt dies eine eingeschränkte Lösung dar. Besser geeignet sind Verfahren, die auf Messinformation basieren.

**Andauernde Anregung:** Die Parameter eines Modells werden an fortlaufend gesammelte Messwerte angepasst. Die Aussagekraft des Schätzergebnisses ist davon abhän-

3 Weitere Simulationen mit kleineren Intervallen für  $\lambda$  führten zu qualitativ vergleichbaren Ergebnissen.

gig, wie gut die zur Verfügung stehenden Messinformationen den relevanten Werte- und Zeitbereich abdecken.

Diese Aspekte sind für die Schätzung der  $\mu$ -Schlupf-Kurven insofern relevant, als dass zum einen wechselnde Fahrbahnverhältnisse vorliegen. Die Aussagekraft vorheriger Messinformation geht damit schlagartig verloren. Zum anderen treten Situationen mit annähernd konstanter Fahrt und somit geringer oder fehlender Anregung auf.

Eine Besonderheit im Antriebsfall sind dynamische Effekte beim Anfahrvorgang. Das Burckhardt-Reifenmodell wurde aus empirischen Messungen im quasi-stationären Zustand ermittelt und verliert seine Gültigkeit insbesondere für  $v_x < 10$  km/h [4]. Es ist daher grundsätzlich ein Kompromiss zwischen Informationsverlust und Gültigkeit des Modells zu finden, etwa indem die Messwerte geschwindigkeitsabhängig ausgeblendet werden.

**Erkennung von Parametersprüngen:** Anders als bei langsam zeitvarianten Veränderungen, wie beispielsweise bei Alterungsprozessen, treten Wechsel der Fahrbahnverhältnisse sprunghaft auf. Eine robuste Lösung kann dies berücksichtigen, indem eine separate Methode zur Erkennung eines  $\mu$ -Sprungs eingesetzt wird.

## 4.2 Methode

Unter Berücksichtigung der zuvor identifizierten Herausforderungen wird im Folgenden eine Methode zur rekursiven Parameterschätzung für das linear parametrisierte Burckhardt-Modell (24) vorgeschlagen.

### 4.2.1 Initialisierung

Die Initialisierungsmöglichkeiten eines vorgegebenen  $\hat{\theta}_0$  oder die Verwendung eines Least-Squares (LS) Schätzers in Blockverarbeitung werden in [7] verglichen. Im Rahmen dieser Arbeit konnten die Ergebnisse reproduziert werden. Weicht das vorgegebene  $\hat{\theta}_0$  erheblich vom tatsächlichen Wert ab, wird ein nicht optimales Konvergenzverhalten beobachtet. Die Initialisierung in LS-Blockverarbeitung zeigt hingegen sehr gute Ergebnisse, auch wenn der erste Schätzwert erst mit einiger Verzögerung bereit steht.

Es wird daher zur Initialisierung eine LS-Schätzung in Blockverarbeitung für die ersten  $k_0$  Messwerte nach Erreichen von  $v_x = 5$  km/h durchgeführt. Damit die nötige Variation der Werte erreicht wird, ist  $k_0$  in Abhängigkeit der Abtastrate experimentell zu ermitteln. In Erweiterung des Ansatzes aus [7] wird hier die eingeschränkte Gül-

tigkeit des Modells für niedrige Absolutgeschwindigkeiten berücksichtigt.

### 4.2.2 Andauernde Anregung

Veränderungen der tatsächlichen Parameterwerte über der Zeit können nur erkannt werden, wenn die im Schätzer vorhandene Informationen hinreichend gut die geänderten Verhältnisse beschreiben. Damit die Schätzung bei einem Wechsel der Parameter gegen den neuen Wert konvergiert, werden die vergangenen Daten im RLS-Schätzer exponentiell mit einem konstanten Vergessensfaktor  $\alpha$  gewichtet [16]. Nachteilig an dieser in [7, 28] verwendeten Methode ist hier, dass der Informationsgehalt der Messdaten nicht berücksichtigt wird. Es wird daher die Verwendung eines RLS-Schätzers mit variablem Vergessensfaktor [11] vorgeschlagen. Die Schätzgleichungen sind:

$$\gamma_k = \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k \cdot \left(1 + \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k\right)^{-1} \quad (26)$$

$$\alpha_k = \max\left(\alpha_{\min}, 1 - \frac{1 - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\gamma}_k}{\Sigma_0} \cdot \left(y_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)^2\right) \quad (27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\gamma}_k \cdot \left(y_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right) \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\alpha_k} \left(\mathbf{P}_{k-1} - \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{P}_{k-1}\right) \cdot \quad (29)$$

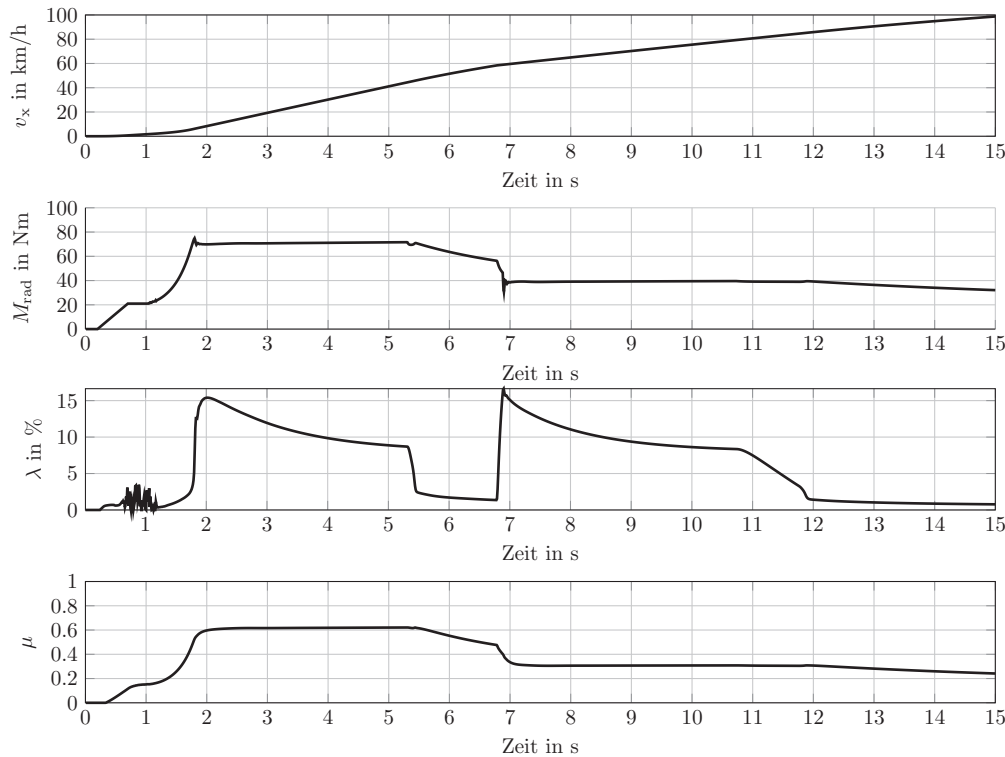
Hierbei ist  $\alpha_{\min}$  ein unterer Wert für den Vergessensfaktor. Der Parameter  $\Sigma_0$  stellt einen nominalen Informationsgehalt dar, welcher durch Variation des Vergessensfaktors beibehalten werden soll. Eine mögliche Wahl ist:

$$\Sigma_0 = \sigma_0^2 \frac{1}{1 - \alpha_0} \cdot \quad (30)$$

Dabei bezeichnet  $\alpha_0$  einen nominalen Vergessensfaktor und  $\sigma_0^2$  die erwartete Varianz des Messrauschens im System.

### 4.2.3 Erkennen von Parametersprüngen

In [14] werden Verfahren zur Detektion von Parametersprüngen untersucht und mit einer Veränderung der Designparameter (Systemkovarianz) im zur Schätzung eingesetzten Kalman-Filter reagiert. Im Folgenden wird das Verfahren des *CUSUM Change Detectors* und die Anwendung im RLS-Schätzer diskutiert. Die Methode besteht aus einer Aufsummierung  $g_k$  des Residuums zwischen Modell und aktuellem Messwert. Die Subtraktion einer Konstante  $v$  in jedem Schritt erhöht die Robustheit gegen kurzfristige Abweichungen. Mit  $g_0 = 0$  sowie einer Beschränkung auf



**Abbildung 3:** Zeitverläufe fahrdynamischer Größen im Beschleunigungsmanöver. Das Antriebsmoment  $M_{\text{rad}}$ , der Reifenschlupf  $\lambda$  sowie der Kraftschlussbeiwert  $\mu$  beziehen sich auf den linken Vorderreifen.

Werte  $g_k \geq 0$  lautet die rekursive Berechnungsvorschrift:

$$g_k = \max\left(0, g_{k-1} + (\mu_k - \psi_k^T \hat{\theta}_k) - v\right). \quad (31)$$

Bei Überschreiten eines vorgegebenen Schwellwertes  $h$  wird die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  des Schätzers neu initialisiert. Alternativ ist ein vollständiges Zurücksetzen des Schätzers denkbar. Weil dies eine Überprüfung der vorliegenden Systemanregung in Bezug auf die Stabilität einer neuen Schätzung erfordert, wird der Ansatz hier nicht verfolgt. Ein zweiter Grund ist, dass nur ein Teil der Modellparameter einen Bezug zur Fahrbahn haben, andere hingegen die unveränderten Eigenschaften des Reifens beschreiben. Dies motiviert, die gesammelte Information bei einem Wechsel der Fahrbahn nicht vollständig zurückzusetzen.

#### 4.2.4 Verbindung zu qualitativen Ansätzen

Die Schätzung der Parameter des Burckhardt-Modells scheint im Gegensatz zu qualitativen Ansätzen als empirisch legitimierte und als robuste Lösung. Dennoch zeugen eine Vielzahl von Forschungsarbeiten von weiterhin großem Interesse an Verfahren lediglich auf Basis des geschätzten *slip-slopes* [14, 22, 26, 30]. Dies lässt sich vor dem Hintergrund der Anregungsproblematik erklären. Wenn

eine gezielte Systemanregung aus praktischen Gründen ausscheidet, kann ein Schätzverfahren bei zu geringem Informationsgehalt der Messdaten nur für ein reduziertes Modell konvergieren. Das minimale Modell ist hier die Approximation des linearen Bereichs der  $\mu$ -Schlupf-Kurve durch eine Gerade.

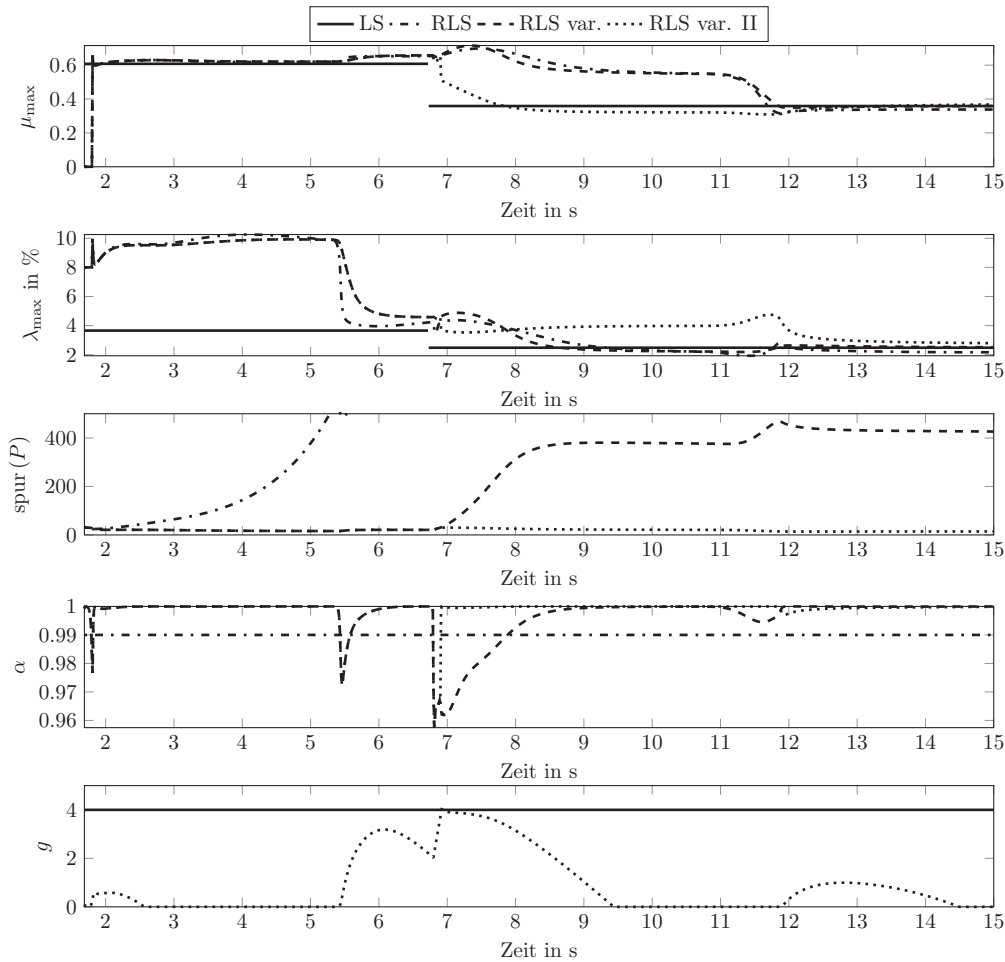
Eine Lösung, die gleichzeitig eine Verbindung zu qualitativen *slip-slope*-Methoden herstellt, ist der Übergang auf ein vereinfachtes lineares Modell nach [17]:

$$\mu(\lambda) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\max,0}} \cdot \mu(\lambda, \theta_0). \quad (32)$$

Die Funktion  $\mu(\lambda, \theta_0)$  beschreibt dabei den Verlauf einer  $\mu$ -Schlupf-Kurve mit dem Fahrbahnreibwert  $\mu_{\max,0}$ . Dem bisherigen Vorgehen folgend kann hierfür beispielsweise das linear parametrisierte Burckhardt-Modell (24) eingesetzt und der Parametervektor geschätzt werden. Diese einmalige Schätzung hält dann die Eigenschaften des Reifens fest, wohingegen (32) als einzigen on-line zu schätzenden Parameter den aktuellen Fahrbahnreibwert  $\mu_{\max}$  enthält.

Bei der Modellierungsgenauigkeit wird ein Kompromiss eingegangen, indem die  $\mu$ -Schlupf-Kurve lediglich skaliert wird. Der dabei auftretende lineare Zusammenhang zwischen Kurvensteigung und  $\mu_{\max}$  steht in Einklang mit den qualitativen *slip-slope* Ansätzen.





**Abbildung 4:** Zeitverläufe der on-line Schätzungen von  $(\lambda_{\max}, \mu_{\max})$  im simulierten Fahrmanöver nach Abb. 3. Verglichen werden ein RLS-Schätzer mit konstantem Vergessensfaktor (RLS), die Verwendung eines variablen Vergessensfaktor nach 4.2.2 (RLS var.) sowie die Sprungerkennung mit Neinitialisierung aus 4.2.3 (RLS var. II). Das Ergebnis einer nachträglichen LS-Schätzung in Blockverarbeitung (LS) dient als Referenz. Des Weiteren sind die Spur der Schätzfehlerkovarianzmatrix, der Vergessensfaktor  $\alpha$  sowie das Residuum  $g$  des *CUSUM Change Detectors* über der Zeit aufgetragen.

### 4.3 Simulation

Die on-line Schätzung des Reifenmodells (24) wird in einem in der Fahrdynamiksimulation IPG CARMAKER simulierten Beschleunigungsmanöver untersucht. Das Fahrzeugmodell entspricht einem batterieelektrisch betriebenen PKW der Kompaktklasse mit Zentralantrieb an der Vorderachse. Die Fahrzeugmasse beträgt 1468 kg, das maximale Motormoment 210 Nm und die Reifen vom Typ 175R6515 sind durch empirische Kennfelder<sup>4</sup> beschrieben. Eine ausführliche Darstellung des Simulationsmodells findet sich in [25].

<sup>4</sup> TYDEX Modell DT\_175\_65R15.tdx im Lieferumfang von IPG CARMAKER Version 3.5.4.

Die Geradeausbeschleunigung erfolgt auf ebener, homogener Fahrbahn mit einem anfänglichen  $\mu_{\max} = 0,6$  und sprunghaftem Übergang auf  $\mu_{\max} = 0,3$  bei  $t \approx 5$  s. In Abbildung 3 sind die fahrdynamischen Größen Fahrgeschwindigkeit, Antriebsmoment am Reifen, Reifenschlupf und Kraftschlussbeiwert mit der hier verwendeten Abtastrate von 100 Hz dargestellt. Der in Anspruch genommene Kraftschlussbeiwert  $\mu$  weist für  $\lambda = 5 \dots 15\%$  keine erkennbare Veränderung auf, was auf ein sehr schwach ausgeprägtes Maximum der  $\mu$ -Schlupf-Kurve hindeutet. Die korrekte Schätzung von  $\lambda_{\max}$  wird hierdurch erschwert.

Drei Varianten der rekursiven Parameterschätzung werden implementiert: Ein RLS-Schätzer mit konstantem  $\alpha = 0,99$ , die vorgeschlagene Verwendung eines variablen Vergessensfaktors nach (27) mit  $\alpha_0 = 0,95$ ,  $\sigma_0^2 = 0,05$ , sowie die Erweiterung dieses Verfahrens um eine gesonderte

Erkennung von Parametersprüngen nach 4.2.3. Letzterer Ansatz wird dabei mit  $\nu = 0,025$ , einer Detektionsschwelle von  $h = 4,0$  und einer Neuinitialisierung auf  $\mathbf{P} = 10 \cdot \mathbf{I}$  parametrieret. Alle Verfahren werden mit demselben vorgegebenen  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  initialisiert. Als Referenz wird eine off-line Least-Squares-Schätzung auf Basis aller Messwerte der jeweiligen Fahrbahnabschnitte herangezogen.

Abbildung 4 zeigt die Zeitverläufe der ermittelten Schätzungen von  $(\lambda_{\max}, \mu_{\max})$ . Des Weiteren sind die Spur der Schätzfehlerkovarianz  $\mathbf{P}$ , der Vergessensfaktor  $\alpha$  sowie das Residuum  $g$  der Sprungerkennung dargestellt.

Im oberen Diagramm ist der sich ändernde Reibwert anhand der eingezeichneten off-line Schätzungen (LS) erkennbar. Die Zeitverläufe der on-line Schätzverfahren zeigen, dass das Verfahren mit zusätzlicher Sprungerkennung (RLS var. II) am schnellsten den geänderten Reibwert ermittelt. Die erkennbare Ungenauigkeit in der  $\lambda_{\max}$ -Schätzung erschließt sich vor dem Hintergrund des sehr schwach ausgeprägten Kraftschlussmaximums. Für den Schätzer mit konstantem Vergessensfaktor (RLS) wächst die Spur der Kovarianz aufgrund fehlender Systemanregung stark an. Dies kann durch das variable  $\alpha$  verringert werden, wobei auch die gezielte Neuinitialisierung von  $\mathbf{P}$  einen erkennbar positiven Einfluss zeigt.

## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Ansatz zur optimalen linearen Parametrierung des Burckhardt-Modells von [7] weiterentwickelt. Insbesondere wurde die Genauigkeit der Approximation durch die Einführung einer neuen Klasse von Basisfunktionen gesteigert und die Anzahl der Modellparameter verringert. Des Weiteren wurde eine implizite Zwangsbedingung des ursprünglichen Burckhardt-Modells eingefügt, um eine höhere Robustheit der Schätzung zu erlangen. Diese Merkmale lassen auf eine verbesserte Eignung des vorgeschlagenen Modells bei der Schätzung der  $\mu$ -Schlupf-Kurve schließen, was in Simulationen bestätigt werden konnte.

Abgesehen von der Wahl der Modellform sind zur erfolgreichen on-line Schätzung der  $\mu$ -Schlupf-Kurve weitere Aspekte zu berücksichtigen. Um die Stabilität des rekursiven Schätzers auch bei fehlender Systemanregung zu gewährleisten, wird vorgeschlagen, einen variablen Vergessensfaktor einzusetzen. Dies wurde in Simulationen mit der Verwendung eines konstanten Vergessensfaktors verglichen. Eine weitere Ergänzung der Methode ist die explizite Erkennung von Parameteränderungen.

Die Vielzahl der aktuellen Arbeiten [18] zur Modellierung und Schätzung des Kraftschlusspotenzials zwi-

schen Reifen und Fahrbahn verdeutlicht die Relevanz dieses Themas. In Hinblick auf eine verbesserte Fahrdynamikregelung aber auch einer energieoptimalen Regelung für alternative Antriebe ist eine genaue Kenntnis über diesen einzigen Kontaktpunkt des Fahrzeugs essentiell.

## Literatur

1. Ahn, Chang S.: *Robust Estimation of Road Friction Coefficient for Vehicle Active Safety Systems*, The University of Michigan, Diss., 2011.
2. Ammon, Dieter: *Modellbildung und Systementwicklung in der Fahrzeugdynamik*. Stuttgart: Teubner, 1997.
3. Breuer, B.; Eichhorn, U.; Roth, H.: Measurement of tyre-road friction ahead of the car and inside the tyre. In: *Proc. Int. Symp. Advanced Vehicle Control*, 1992, S. 347–353.
4. Burckhardt, Manfred: *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme*. Würzburg: Vogel, 1993.
5. Carlson, C.R.; Gerdes, J.C.: Consistent nonlinear estimation of longitudinal tire stiffness and effective radius. In: *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 13 (2005), Nr. 6, S. 1010–1020.
6. Castro, R. de; Araujo, R.E.; Cardoso, J.S.; Freitas, D.: A new linear parametrization for peak friction coefficient estimation in real time. In: *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2010 IEEE*, 2010, S. 1–6.
7. Castro, Ricardo de; Araújo, Rui E.; Freitas, Diamantino: Optimal Linear Parameterization for On-Line Estimation of Tire-Road Friction. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, 2011* Bd. 18, 2011, S. 8409–8414.
8. Castro, Ricardo de; Araújo, Rui E.; Freitas, Diamantino: Real-time estimation of tyre-road friction peak with optimal linear parameterisation. In: *IET Control Theory and Applications* 6 (2012), Nr. 14, S. 2257–2268.
9. Castro, Ricardo de; Araújo, Rui E.; Tanelli, Mara; Savaresi, Sergio M.; Freitas, Diamantino: Torque blending and wheel slip control in EVs with in-wheel motors. In: *Vehicle System Dynamics* 50 (2012), Nr. sup1, S. 71–94.
10. Daïß, Armin: *Beobachtung fahrdynamischer Zustände und Verbesserung einer ABS- und Fahrdynamikregelung*. Düsseldorf: VDI Verlag, 1996.
11. Fortescue, T.R.; Kershenbaum, L.S.; Ydstie, B.E.: Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors. In: *Automatica* 17 (1981), Nr. 6, S. 831–835.
12. Geamanu, M.S.; Cela, A.; LeSolliec, G.; Mounier, H.; Niculescu, S.: Road condition estimation and longitudinal control for electric vehicles. In: *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2011 11th International Conference on*, 2011, S. 599–604.
13. Germann, S.; Wurtenberger, M.; Daiss, A.: Monitoring of the friction coefficient between tyre and road surface. In: *Control Applications, 1994., Proceedings of the Third IEEE Conference on* Bd. 1, 1994, S. 613–618.
14. Gustafsson, Fredrik: Slip-based tire-road friction estimation. In: *Automatica* 33 (1997), Nr. 6, S. 1087–1099.
15. Kiencke, Uwe; Nielsen, Lars: *Automotive control systems*. 2. Aufl. Berlin: Springer, 2005.

16. Kiencke, Uwe; Schwarz, Michael; Weickert, Thomas: *Signalverarbeitung: Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. München: Oldenbourg, 2008.
17. Lee, Hyeongscheol; Tomizuka, M.: Adaptive vehicle traction force control for intelligent vehicle highway systems (IVHSs). In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 50 (2003), Nr. 1, S. 37–47.
18. Lex, Cornelia; Eichberger, Arno; Hirschberg, Wolfgang: Methoden zur Ermittlung des Reifen-Fahrbahn-Kraftschlusspotenzials für Fahrerassistenzsysteme. In: *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 113 (2011), Nr. 12, S. 992–997.
19. Ljung, Lennart: *System Identification: Theory for the User*. 2. Aufl. Prentice Hall, 1999.
20. LLC, Ziena O.: *Knitro Documentation 8.0*. <http://www.ziena.com/documentation.htm>, Nov. 2011. – abgerufen 14.08.2012.
21. Mitschke, Manfred; Wallentowitz, Henning: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. 4., neubearb. Aufl. Berlin: Springer, 2004 (VDI).
22. Müller, Steffen; Uchanski, Michael; Hedrick, Karl: Estimation of the Maximum Tire-Road Friction Coefficient. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 125 (2003), Nr. 4, S. 607–617.
23. Onoa, Eiichi; Asano, Katsuhiko; Sugaia, Masaru; Itob, Shoji; Yamamoto, Masaki; Sawadac, Mamoru; Yasuid, Yoshiyuki: Estimation of automotive tire-force characteristics using wheel velocity. In: *Control Engineering Practice* 11 (2003), Nr. 12, S. 1361–1370.
24. Pacejka, H. B.: *Tire and vehicle dynamics*. 2. Aufl. SAE International, 2007.
25. Paul, Jens: *Aufbau eines Fahrzeugsimulationsmodells für Untersuchungen zum batterieelektrischen Fahrbetrieb*, Karlsruher Institut für Technologie, Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik, Diplomarbeit, 2012.
26. Rajamani, Rajesh; Phanomchoeng, Gridsada; Piyabongkarn, Damrongrit; Lew, Jae Y.: Algorithms for Real-Time Estimation of Individual Wheel Tire-Road Friction Coefficients. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 17 (2012), Nr. 6, S. 1183–1195.
27. Svendenius, Jacob: *Tire Modeling and Friction Estimation*, Lund University, Diss., 2007.
28. Tanelli, Mara; Pirodi, L.; Savaresi, Sergio M.: Real-time identification of tire-road friction conditions. In: *IET Control Theory and Applications* 3 (2009), Nr. 7, S. 891–906.
29. Tanelli, Mara.; Savaresi, Sergio M.: Friction-curve peak detection by wheel-deceleration measurements. In: *Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference 2006*, 2006, S. 1592–1597.
30. Uchanski, Michael: *Road Friction Estimation for Automobiles Using Digital Signal Processing Methods*. Berkeley, University of California, Diss., 2001.
31. Villagra, Jorge; Novel, Brigitte d'Andréa; Fliess, Michael; Mounier, Hugues: A diagnosis-based approach for tire-road forces and maximum friction estimation. In: *Control Engineering Practice* 19 (2011), S. 174–184.
32. Wit, Carlos Canudas-de; Tsiotras, Panagiotis; Velenis, Efstathios; Basset, Michel; Gissinger, Gerard: Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction. In: *Vehicle System Dynamics* 39 (2003), Nr. 3, S. 189–226.



**M.Sc. Jan Erik Stellet**  
 Karlsruher Institut für Technologie,  
 Kaiserstraße, 12, D-76131 Karlsruhe,  
 Germany  
[jan.stellet@student.kit.edu](mailto:jan.stellet@student.kit.edu)

M.Sc. Jan Erik Stellet studierte Elektro- und Informationstechnik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) und ist nun Doktorand in der Abteilung Fahrzeug-Sicherheit und Assistenzsysteme im Zentralbereich Forschung und Vorausbewertung der Robert Bosch GmbH.



**Dr.-Ing. Martin Gießler**  
 Karlsruher Institut für Technologie, Institut  
 für Fahrzeugsystemtechnik, Lehrstuhl für  
 Fahrzeugtechnik, Rintheimer Querallee 2,  
 D-76131 Karlsruhe, Germany  
[martin.giessler@kit.edu](mailto:martin.giessler@kit.edu)

Dr.-Ing. Martin Gießler ist Leiter der Forschungsgruppe Fahrzeugkonzepte am Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik des Karlsruher Institutes für Technologie.



**Dipl.-Ing. Andre Suchaneck**  
 Karlsruher Institut für Technologie, Institut  
 für Industrielle Informationstechnik,  
 Hertzstraße 16, D-76187 Karlsruhe,  
 Germany  
[suchaneck@kit.edu](mailto:suchaneck@kit.edu)

Dipl.-Ing. Andre Suchaneck ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Industrielle Informationstechnik am Karlsruher Institut für Technologie.



**Prof. Dr.-Ing. Fernando Puente León**  
 Karlsruher Institut für Technologie, Institut  
 für Industrielle Informationstechnik,  
 Hertzstraße 16, D-76187 Karlsruhe,  
 Germany  
[puente@kit.edu](mailto:puente@kit.edu)

Prof. Dr.-Ing. Fernando Puente León leitet das Institut für Industrielle Informationstechnik am Karlsruher Institut für Technologie.



**Prof. Dr. rer. nat. Frank Gauterin**  
Karlsruher Institut für Technologie, Institut  
für Fahrzeugsystemtechnik, Lehrstuhl für  
Fahrzeugtechnik, Rintheimer Querallee 2,  
D-76131 Karlsruhe, Germany  
[frank.gauterin@kit.edu](mailto:frank.gauterin@kit.edu)

Prof. Dr. rer. nat. Frank Gauterin ist Leiter des Lehrstuhls für Fahrzeugtechnik und des Instituts für Fahrzeugsystemtechnik (FAST) am Karlsruher Institut für Technologie.